

# Parte Control 5 Álgebra.

P1. Calcular el valor de  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b^i$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , fijo.  $b \neq 1/2$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b^i = \sum_{i=0}^n \left[ b^i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \right]$$

pues  $b^i$  es independiente de  $j$

$$= \sum_{i=0}^n b^i 2^i$$

pues  $\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} = 2^i$  según el

binomio  $\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} 1^j 1^{i-j} = (1+1)^i$

es una suma geométrica. Entonces

$$= \sum_{i=0}^n (2b)^i$$

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b^i = \frac{1 - (2b)^{n+1}}{1 - 2b}$$

$b \neq 1/2$

2 pts

P2. La l.x.i.  $*$  en  $\mathbb{R}^2$  es  $(a,b) * (c,d) = (ac, bc+ad)$

a) Conmutatividad

$$(a,b) * (c,d) = (ac, bc+ad) \quad \text{y} \quad (c,d) * (a,b) = (ac, ad+bc)$$

1. pts

Claramente  $(a,b) * (c,d) \neq (c,d) * (a,b)$ , es decir  $*$  no es conmutativa.

b) Asociatividad

Sean  $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{R}^2$ . Calculemos

$$\begin{aligned} [(a,b) * (c,d)] * (e,f) &= (ac, bc+ad) * (e,f) = (ace, (bc+ad)e+af) \\ &= (ace, bce+ade+af) \end{aligned}$$

$$\text{y } (a,b) * [(c,d) * (e,f)] = (a,b) * (ce, de+cf) = (ace, bce+ade+af)$$

1 pts

Entonces  $*$  es Asociativa.

c) Sea  $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$ , neutro para  $*$ .

$$\text{Entonces } (e_1, e_2) * (a,b) = (a,b) \Rightarrow (e_1 a, e_2 a + b) = (a,b), \text{ de donde}$$

$$\begin{aligned} e_1 a &= a \Rightarrow e_1 = 1 \wedge e_2 = 0, \text{ entonces } (e_1, e_2) = (1, 0) \text{ que verificamos por la derecha.} \\ e_2 a + b &= b \end{aligned}$$

$$(a,b) * (1,0) = (a \cdot 1, b \cdot 1 + 0) = (a,b)$$

Entonces  $(1,0)$  es neutro para  $*$  en  $\mathbb{R}^2$  1 pto

d) Elementos invertibles

Si  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$  es invertible, como  $*$  es asociativa, su inverso  $(a',b')$  es único y  $(a,b) * (a',b') = (e_1, e_2) = (1,0)$ .  
 Sigue que  $(a,b) * (a',b') = (aa', ba' + b') = (1,0)$ , eni. 1 pto

$$\begin{aligned} aa' &= 1 & ba' + b' &= 0 \\ \Rightarrow a' &= 1/a & b' &= -b/a \end{aligned} \Rightarrow (a',b') = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$$

En consecuencia son invertibles para  $*$  en  $\mathbb{R}^2$  los elementos  $(a,b) \in \mathbb{R}^2$  en que  $a \neq 0$  y sus inversos son  $(1/a, -b/a)$ .  
 No se exige verificar el inverso por la izquierda. 1 pto

e) Idempotentes

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$  es idempotente si  $(a,b) * (a,b) = (a,b)$

$$\text{Entonces } (a^2, ab + b) = (a,b) \Rightarrow \begin{aligned} a^2 &= a \\ ab + b &= b \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 1 \vee a = 0 \\ b &= 0 \vee b \text{ cualquiera} \end{aligned}$$

Sigue que son idempotentes  $(1,0)$  que es el neutro y los pares de la forma  $(0,b), b \in \mathbb{R}$  1 pto

P3.  $A$  es numerable y  $\mathcal{F} = \{f: \{1,2,3\} \rightarrow A \mid f \text{ es función}\}$

Para demostrar que  $|\mathcal{F}| = |A \times A \times A| = |A|^3$  es necesario encontrar una biyección  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow A \times A \times A$ .

Esto puede ser:  $\forall f \in \mathcal{F}, \varphi(f) = (f(1), f(2), f(3)) \in A \times A \times A$  que es biyectivo pues 3 pto

Es inyectiva:  $\varphi(f) = \varphi(g) \Rightarrow (f(1), f(2), f(3)) = (g(1), g(2), g(3))$   
 $\Rightarrow f(1) = g(1), f(2) = g(2), f(3) = g(3) \Rightarrow f = g \quad \forall x \in \{1,2,3\}$ . 1 pto

Es sobreyectiva:  $\forall (a,b,c) \in A^3$  es inmediato que

$\exists f \in F$  tal que  $f(1)=a, f(2)=b$  y  $f(3)=c$  0.5 pts

Es decir  $\exists f \in F$  tal que  $\varphi(f)=(a,b,c) \in A^3$

De modo que al ser  $f$  biyectiva  $|F|=|A \times A \times A|$

Además, como  $A$  es numerable,  $A \times A \times A$  es numerable (Propiedad)

Se concluye que  $F$  es numerable. 2 pts